2026

CANPOINT®

CANPOINT®

全品

高考复习方案

主编：肖德好

听课手册

数学

RJB

沈阳出版发行集团
沈阳出版社

全品高考复习方案 数学

《中国高考评价体系》

指导

2026版
《全品复习方案》

依据 《普通高中数学课程标准》

细研 高考命题特点及趋势

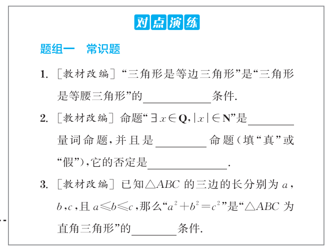
特点

1. 关注新教材，细讲精练，密切贴合新教材。
2. 渗透数学学科核心素养：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析。
3. 体现高考命题趋势，精选模拟试题。
4. 结合教学一线一轮复习实际，合理设置讲练内容。

▼ 图书结构与特点

听课手册

必备基础梳理 —— 教材改编，理解应用；易错易混，拾遗补漏

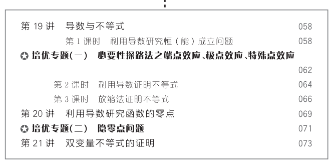


对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] “三角形是等边三角形”是“三角形是等腰三角形”的________条件.
2. [教材改编] 命题“$\exists x\in\mathbf{Q}$，$|x|\in\mathbf{N}$”是________量词命题，并且是________命题(填“真”或“假”)，它的否定是________.
3. [教材改编] 已知△ABC的三边的长分别为a，b，c，且$a\leqslant b\leqslant c$，那么“$a^2+b^2=c^2$”是“△ABC为直角三角形”的________条件.

核心章节，分课时讲解

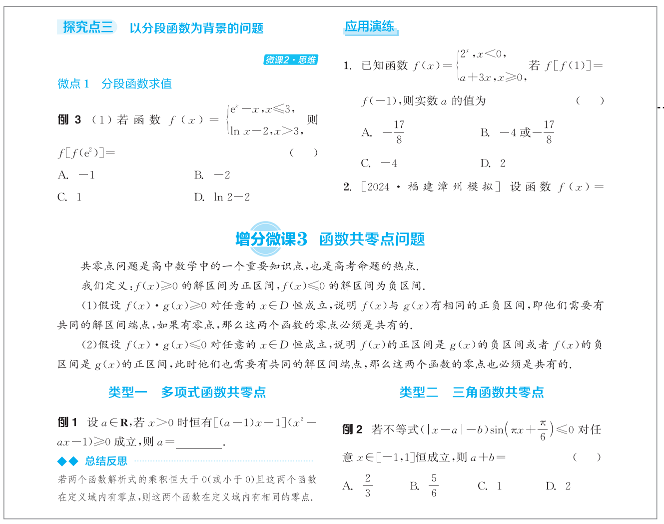


夯基础

常识常错巩固

究本源

课堂考点探究



探究点三　以分段函数为背景的问题

微点1　分段函数求值

例3 (1)若函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-x,x\leqslant 3,\\ \ln x-2,x>3,\end{cases}$ 则 $f[f(e^3)]=$ (　　)

A. −1　B. −2　C. 1　D. ln 2−2

应用演练

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x<0,\\ a+3x,x\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $f[f(1)]=f(-1)$，则实数a的值为 (　　)

A. $-\frac{17}{8}$　B. −4或$-\frac{17}{8}$　C. −4　D. 2

2. [2024·福建漳州模拟] 设函数 $f(x)=$

增分微课3　函数共零点问题

共零点问题是高中数学中的一个重要知识点，也是高考命题的热点.

我们定义：$f(x)\geqslant 0$的解区间为正区间，$f(x)\leqslant 0$的解区间为负区间.

(1)假设 $f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in D$ 恒成立，说明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的正负区间，即他们需要有共同的解区间端点，如果有零点，那么这两个函数的零点必须是共有的.

(2)假设 $f(x)\cdot g(x)\leqslant 0$ 对任意的 $x\in D$ 恒成立，说明 $f(x)$ 的正区间是 $g(x)$ 的负区间或者 $f(x)$ 的负区间是 $g(x)$ 的正区间，此时他们也需要有共同的解区间端点，那么这两个函数的零点也必须是共有的.

类型一　多项式函数共零点

例1　设 $a\in\mathbf{R}$，若 $x>0$ 时恒有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$ 成立，则 $a=$________.

总结反思

若两个函数解析式的乘积恒大于0(或小于0)且这两个函数在定义域内有零点，则这两个函数在定义域内有相同的零点.

类型二　三角函数共零点

例2　若不等式 $(|x-a|-b)\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 0$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 恒成立，则 $a+b=$ (　　)

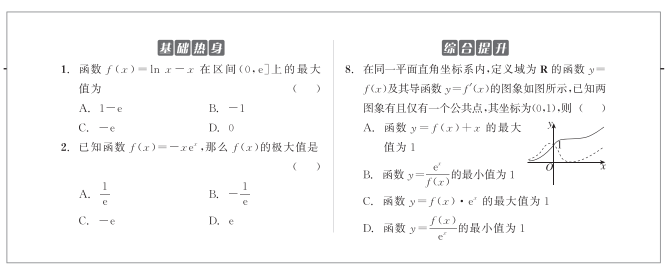
A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{5}{6}$　C. 1　D. 2

学科难点　增分拓展

基点·难点·重点　讲清·讲透·讲活

作业手册

课时作业



基础热身

1. 函数 $f(x)=\ln x-x$ 在区间 $(0,e]$ 上的最大值为 (　　)

A. 1−e　B. −1　C. −e　D. 0

2. 已知函数 $f(x)=-xe^x$，那么 $f(x)$ 的极大值是 (　　)

A. $\frac{1}{e}$　B. $-\frac{1}{e}$　C. −e　D. e

综合提升

8. 在同一平面直角坐标系内，定义域为R的函数 $y=f(x)$ 及其导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，已知两图象有且仅有一个公共点，其坐标为(0,1)，则 (　　)

A. 函数 $y=f(x)+x$ 的最大值为1

B. 函数 $y=\frac{e^x}{f(x)}$ 的最小值为1

C. 函数 $y=f(x)\cdot e^x$ 的最大值为1

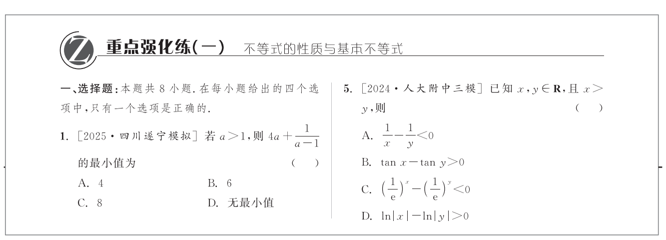
D. 函数 $y=\frac{f(x)}{e^x}$ 的最小值为1

挑战零失误　分层排查

全覆盖、破重难

增分加练

提综合



重点强化练(一)　不等式的性质与基本不等式

一、选择题：本题共8小题，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的.

1. [2025·四川遂宁模拟] 若 $a>1$，则 $4a+\frac{1}{a-1}$ 的最小值为 (　　)

A. 4　B. 6　C. 8　D. 无最小值

5. [2024·人大附中三模] 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x>y$，则 (　　)

A. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0$

B. $\tan x-\tan y>0$

C. $\left(\frac{1}{e}\right)^x-\left(\frac{1}{e}\right)^y<0$

D. $\ln|x|-\ln|y|>0$

强化趋势　题型阶段

薄弱点·疑难点　练熟·练透·练活

目录 CONTENTS

培优专题

增分加练

Unit 01

第一单元　预备知识

第 1 讲　集合

【课标要求】 1. 通过实例，了解集合的含义，理解元素与集合的关系.
2. 针对具体问题，能在自然语言和图形语言的基础上，用符号语言刻画集合.
3. 在具体情境中，了解全集与空集的含义.
4. 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集.
5. 理解两个集合的并集与交集的含义，能求两个集合的并集与交集.
6. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，能求给定子集的补集.
7. 能使用维恩图表达集合的基本关系与基本运算，体会图形对理解抽象概念的作用.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 集合及其表示方法

(1)集合元素的特点：________、________、无序性.

(2)集合与元素的关系：①属于，记为________；②不属于，记为________.

(3)集合的表示方法：列举法、________、____________和区间法.

(4)常见数集及记法

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	______	______	______	______	______

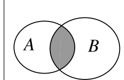
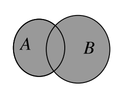
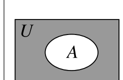
2. 集合间的基本关系

	文字语言	符号语言	记法
子集	集合 A 中________都是集合 B 中的元素	$x\in A\Rightarrow x\in B$	$A\subseteq B$ 或______
真子集	集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中____有一个元素不属于 A	①$A\subseteq B$；②$\exists x\in B$，$x\notin A$	A____B 或 $B\supsetneqq A$
相等	集合 A，B 中的元素完全______	$A\subseteq B$，$B\subseteq A$	______

（续表）

	文字语言	符号语言	记法
空集	______任何元素的集合，空集是任何集合的子集	①$\forall x$，$x\notin\varnothing$；②$\varnothing\subseteq A$	$\varnothing$

3. 集合的基本运算

表示 运算	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	由所有属于 A____属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$，____$x\in B\}$		______
并集	由所有属于 A____属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$，____$x\in B\}$		______
补集	全集 U 中____属于 A 的所有元素组成的集合	$\{x\mid x\in U$，x____$A\}$		______

4. 集合的运算性质

(1)交集的运算性质：$A\cap B=B\cap A$；$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A$________$B$.

(2)并集的运算性质：$A\cup B=$__________；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$；$A\cup B=$________$\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(3)补集的运算性质：$A\cup(\complement_U A)=U$；$A\cap(\complement_U A)=$________；$\complement_U(\complement_U A)=$________；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)$______$(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cap B)=$________$\cup$________.

◆◆ 常用结论

1. 集合子集的个数：集合 A 中有 n 个元素，则集合 A 有 2^n 个子集、2^n-1 个真子集、2^n-1 个非空子集、2^n-2 个非空真子集.

2. 子集的传递性：$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$（真子集也满足）.

3. $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow(\complement_U A)\supseteq(\complement_U B)$.

4. 集合元素个数：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$（常用在实际问题中）.

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，则 3________A，$\{2\}$________A，$\{2,3\}$______A（从"$\in$，$\notin$，$\subsetneqq$，$=$"中选择合适的符号填空）.

2. [教材改编] 已知集合 $C=\{(x,y)\mid y=x\}$，集合 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}2x-y=1,\\x+4y=5\end{cases}\right\}$，集合 D 用列举法表示为________，并且 C________D（从"$=$""$\subseteq$""$\supseteq$"中选一个合适的填入）.

3. [教材改编] 设全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$，$B=\{x\mid 2<x<10\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=$______，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$________.

题组二 常错题

4. [忽视集合中元素的特性] 已知集合 $A=\{a-2,a^2+4a,10\}$，若 $-3\in A$，则实数 a 的值为________.

5. [忽视代表元素] 已知集合 $A=\{x\mid y=\ln(x-1)\}$，$B=\{y\mid y=x^2-4x,x\in A\}$，则 $A\cup B=$________.

6. [忽视高次项系数] 已知集合 $A=\{2,3\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，则实数 a 的所有可能取值组成的集合为______________.

7. [忽视判别式] 已知 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，则 a 的取值范围为____________.

课堂考点探究

探究点一 集合的概念及表示

例 1 (1)已知集合 $A=\{x\mid 2mx-3>0,m\in\mathbf{R}\}$，$2\in A$ 且 $1\notin A$，则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right]$ B. $\left[\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$ D. $\left[\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right]$

(2)[2024·南京二模] 已知集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,x-y\in A\}$，则集合 B 中的元素个数为__________.

(2)设 $a,b\in\mathbf{R}$，已知集合 $\left\{1,a,\frac{b}{a}\right\}=\{0,a^2,a+b\}$，则 $(a+b)^{2025}=$________.

◆◆ 总结反思

解决集合概念问题的关键有三点：一是确定构成集合的元素是什么；二是看这些元素的限制条件是什么；三是根据元素的特征(满足的条件)构造关系式解决相应问题.特别提醒：含字母的集合问题，在求出字母的值后，需要验证集合中的元素是否满足互异性.

变式题 (1)若集合 $A=\{x\mid mx^2+2x+m=0,m\in\mathbf{R}\}$ 中有且只有一个元素，则 m 的取值集合是 ( )

A. $\{-1\}$ B. $\{0\}$

C. $\{-1,1\}$ D. $\{-1,0,1\}$

探究点二 集合间的基本关系

例 2 (1)已知集合 $P=\{x\mid y=\sqrt{x+1}\}$，$Q=\{y\mid y=x^2\}$，则下列选项中正确的是 ( )

A. $P\cup Q=\mathbf{R}$ B. $Q\subseteq P$

C. $P\cap Q=\varnothing$ D. $P\subseteq Q$

(2)[2023·新课标Ⅱ卷] 设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$ ( )

A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1

◆◆ 总结反思

(1)一般利用数轴法、维恩图法以及结构法判断两集合的关系，对于含有参数的集合，需要对式子进行变形，有时需要进一步对参数进行分类讨论.

(2)确定非空集合 A 的子集的个数，需先确定集合 A 中的元素的个数.特别提醒：不能忽略任何非空集合是它自身的子集，空集是非空集合的真子集.

(3)根据集合的关系求参数值(或取值范围)的关键是将条件转化为元素满足的式子或区间端点间的关系.

变式题 (1)满足条件$\{2,3\}\subseteq A\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$的集合 A 的个数为 ( )

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

(2)[2025·河北部分地区模拟] 已知集合 $A=\{x|\log_2(x-1)<1\}$,$B=\{x|m<x<2m+1\}$,若 $B\subseteq A$,则 m 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,-1]\cup\{1\}$　　B. $[1,3]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,3]$

探究点三　集合的基本运算

》角度 1　集合的运算

例 3 (1)[2024·南昌三模] 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{2x-x^2}\}$,$B=\{y|y=2^x+1\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $(1,2]$　　B. $(0,1]$

C. $[1,2]$　　D. $[0,2]$

(2)[2023·全国乙卷] 设集合 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x<1\}$,$N=\{x|-1<x<2\}$,则$\{x|x\geqslant 2\}=$ ( )

A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup(\complement_U M)$

C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup(\complement_U N)$

◆◆ **总结反思**

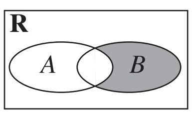
对于已知集合的运算,可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解,必要时可结合数轴以及维恩图求解.

变式题 (1)设集合 $A=\{x|3^x<27,x\in\mathbf{N}\}$,$B=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<2\}$,则 $A\cup B=$ ( )

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{x|-2<x<3\}$

(2)[2024·河北沧州三模] 已知集合 $A=\{x||x-2|\geqslant 1\}$,$B=\{x|2\leqslant x<4\}$,则图中阴影部分表示的集合是 ( )



A. $\{x|1<x<2\}$　　B. $\{x|2\leqslant x<3\}$

C. $\{x|1\leqslant x<4\}$　　D. $\{x|2<x\leqslant 4\}$

》角度 2　利用集合的运算求参

例 4 (1)[2025·陕西铜川模拟] 已知集合 $A=\{1,2,m\}$,$B=\{x|x^2-2x-3<0\}$,若 $A\cup B=B$,则实数 m 的值可能是 ( )

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

(2)已知集合 $A=\{x|x^2<1\}$,$B=\{x|x>a,a\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,则 a 的取值范围为________.

◆◆ **总结反思**

利用集合的运算求参数的值或取值范围的方法

(1)与不等式有关的集合,一般利用数轴解决,要注意端点值能否取到.

(2)若集合中的元素能一一列举,则一般先用观察法得到不同集合中元素之间的关系,再列方程(组)求解.

变式题 (1)[2024·阜阳一模] 设集合 $S=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$,集合 $T=\{x|a<x<a+8\}$,且 $S\cup T=\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

B. $(-3,-1)$

C. $(-\infty,-3]\cup[-1,+\infty)$

D. $[-3,-1]$

(2)若集合 $A=\{1,9,a^2\}$,$B=\{9,3a\}$,则满足 $A\cap B=B$ 的实数 a 的个数为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

探究点四　集合的新定义问题

例 5 [2025·四川成都模拟] 定义:如果集合 U 存在一组两两不交(两个集合的交集为空集时,称为不交)的非空真子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ $(k\in\mathbf{N}^*,k>1)$,且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=U$,那么称子集族$\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$构成集合 U 的一个 k 划分. 已知集合 $I=\{x\in\mathbf{N}|x^2-6x+5<0\}$,则集合 I 的所有划分的个数为 ( )

A. 3　　B. 4　　C. 14　　D. 16

◆◆ **总结反思**

破解集合新定义问题的关键:

(1)读懂新定义:首先分析新定义的特点,把新定义所叙述的问题的本质弄清楚,应用到具体的解题过程之中.

(2)会转化:解题时要善于从试题中发现可以使用集合性质的一些因素进行转化,化陌生问题为熟悉的问题.

变式题 (多选题)设 P 是一个数集,且至少含有两个数,若对于任意 $a,b\in P$,都有 $a+b,a-b,ab\in P$,且当 $b\neq 0$ 时,$\dfrac{a}{b}\in P$,则称 P 是一个数域. 例如,有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域. 下列说法正确的有 ( )

A. 数域中必含有 0,1 两个数

B. 整数集是数域

C. 若有理数集 $\mathbf{Q}\subseteq M$,则数集 M 一定是数域

D. 数域中有无限多个元素

第 2 讲　常用逻辑用语

【课标要求】 1. 理解必要条件、充分条件、充要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.

2. 理解全称量词与存在量词的意义，能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定，能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 全称量词与存在量词

(1)一般地，“________”“________”“______”在陈述中表示所述事物的全体，称为全称量词，用符号“________”表示.

(2)“________”“________”“____________”在陈述中表示所述事物的个体或部分，称为存在量词，用符号“________”表示.

(3)含有一个量词的命题的否定：

含有量词的命题	p	$\neg p$	结论
全称量词命题	$\forall x\in M$, $p(x)$	$\exists x\in M$, $\neg p(x)$	全称量词命题的否定是____________
存在量词命题	$\exists x\in M$, $p(x)$	$\forall x\in M$, $\neg p(x)$	存在量词命题的否定是____________

2. 常用的正面叙述词语和它的否定词语

正面词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是
否定词语	不等于(≠)	不大于(≤)	不小于(≥)	不是

正面词语	都是	任意的	所有的	至多有一个	至少有一个
否定词语	不都是	某个	某些	至少有两个	一个也没有

3. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的________条件，q 是 p 的________条件	
p 是 q 的________条件	$p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$
p 是 q 的________条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$
p 是 q 的________条件	$p\Leftrightarrow q$
p 是 q 的____________条件	$p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$

对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] “三角形是等边三角形”是“三角形是等腰三角形”的____________条件.

2. [教材改编] 命题“$\exists x\in\mathbf{Q}$, $|x|\in\mathbf{N}$”是________量词命题，并且是________命题(填“真”或“假”)，它的否定是______________.

3. [教材改编] 已知△ABC 的三边的长分别为 a，b，c，且 $a\leqslant b\leqslant c$，那么“$a^2+b^2=c^2$”是“△ABC 为直角三角形”的________条件.

4. [教材改编] 若“$\forall x\in[-1,2]$, $x^2-m\leqslant1$”为真命题，则实数 m 的最小值为________.

题组二　常错题

5. [不对命题完全否定] 命题“奇数的立方是奇数”的否定是________________.

6. [忽视等号取舍] 已知 $A=(-\infty,a]$, $B=(-\infty,3]$.

①若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，则 a 的取值范围是________；

②若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要不充分条件，则 a 的取值范围是________；

③若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分必要条件，则 a 的值为________.

7. [混淆条件与结论] “$\ln(x+1)<0$”是“$x<0$”的______________条件.(从“充分不必要”“必要不充分”“充要”“既不充分也不必要”中选填)

8. [忽视高次项系数] 已知命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $ax^2+2x+3>0$，若命题 p 为假命题，则实数 a 的取值范围是________.

探究点一　全称量词与存在量词

角度1　全称量词命题与存在量词命题的真假判断

例1 下列命题中的假命题是 (　　)

A. $\exists x\in\mathbf{R}, \log_2 x<0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R}, \cos x=1$

C. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2>0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}, 2^x>0$

总结反思

全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法:

命题名称	真假	判断方法一	判断方法二
全称量词命题	真	所有对象使命题为真	否定为假
	假	存在一个对象使命题为假	否定为真
存在量词命题	真	存在一个对象使命题为真	否定为假
	假	所有对象使命题为真	否定为真

变式题 (多选题)下列命题中是真命题的是 (　　)

A. $\exists x\in(0,1), 2^x>3^x$

B. $\forall x\in(1,+\infty), \log_2 x>\log_3 x$

C. $\exists x\in\left(0,\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^x>\log_{\frac{1}{3}} x$

D. $\forall x\in\left(0,\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{3}} x$

角度2　含有一个量词的命题的否定

例2 (1)命题 p: $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), x>\sin x$,则 $\neg p$:____________.

(2)命题 p:有的等差数列是等比数列,则其否定为 (　　)

A. 有的等差数列不是等比数列

B. 有的等比数列是等差数列

C. 所有的等差数列都是等比数列

D. 所有的等差数列都不是等比数列

总结反思

全称量词命题与存在量词命题的否定:

①改写量词:确定命题所含量词的类型,省去量词的要结合命题的含义加上量词,再对量词进行改写;

②否定结论:对原命题的结论进行否定.

变式题 (1)[2024·天津河西区二模] 命题“$\exists m\in\mathbf{N}, \sqrt{m^2+1}\in\mathbf{N}$”的否定是 (　　)

A. $\forall m\in\mathbf{N}, \sqrt{m^2+1}\in\mathbf{N}$

B. $\forall m\notin\mathbf{N}, \sqrt{m^2+1}\notin\mathbf{N}$

C. $\exists m\in\mathbf{N}, \sqrt{m^2+1}\notin\mathbf{N}$

D. $\forall m\in\mathbf{N}, \sqrt{m^2+1}\notin\mathbf{N}$

(2)[2024·新课标Ⅱ卷] 已知命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}, |x+1|>1$,命题 q: $\exists x>0, x^3=x$,则 (　　)

A. p 和 q 都是真命题

B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题

D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

角度3　含量词命题的应用

例3 [2024·安徽六安一中四模] 设函数 $f(x)=ax^2-2ax$,若“$\exists x\in[2,6], f(x)\leqslant -2a+3$”是假命题,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$　　B. $(3,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

总结反思

根据命题的真假求参数的一般步骤:

(1)根据题目条件,推出每一个命题的真假(有时不一定只有一种情况);

(2)求出每个命题是真命题时参数的取值范围;

(3)根据每个命题的真假情况,求出参数的取值范围.

变式题 [2024·福建漳州质检] 若“$\exists\alpha\in[0,+\infty), \cos\alpha<m$”为真命题,则实数 m 的取值范围为________.

探究点二　充分条件与必要条件的判断

例4 (1)[2024·江西南昌二模] 已知集合 $A=\{x|\ln x\leqslant 0\}, B=\{x|2^x\leqslant 2\}$,则“$x\in A$”是“$x\in B$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2024·北京卷] 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是向量,则“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(3)若 $x,y\in\mathbf{R}$,则"$x>y$"的一个充分不必要条件可以是 (　　)

A. $|x|>|y|$　　B. $x^2>y^2$

C. $\frac{x}{y}>1$　　D. $2^{x-y}>2$

◆◆ 总结反思

充分条件、必要条件的两种判定方法

(1)定义法:适用于定义、定理的判断问题;

(2)集合法:多适用于条件中涉及参数的取值范围的推断问题.

变式题 (1)[2024·山东聊城三模]"$a+b<-2$,且 $ab>1$"是"$a<-1$,且 $b<-1$"的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2024·浙江宁波二模]已知三个不同的平面 α,β,γ 与直线 l,若 $\alpha\cap\beta=l$,则"$l\perp\gamma$"是"$\alpha\perp\gamma$ 且 $\beta\perp\gamma$"的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

探究点三　充要条件的证明

例 5 求证:"$a\geqslant2$,且 $-4<b<4$"是"关于 x 的方程 $x^2+2ax+b=0$ 有两个不等实数根,且两根均小于2"的充分不必要条件.

◆◆ 总结反思

1. 有关充要条件的证明问题,证明时要分两个环节:一是证明充分性;二是证明必要性.要明确它的叙述格式,避免在论证时将充分性错当必要性证明,而又将必要性错当充分性证明.

2. 证明充要条件问题,若直接证明比较困难,则可先根据命题之间的关系进行等价转换,再加以证明.

变式题 已知 a,b,c 是实数,且满足 $a+b+c=0$,证明下列命题:

(1)"$a=b=c=0$"是"$ab+bc+ac=0$"的充要条件;

(2)"$abc=1,a\geqslant b\geqslant c$"是"$c\leqslant-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$"的充分条件.

探究点四　充分条件与必要条件的应用

例 6 [2024·山东烟台二模]已知 $p:1<2^x<4$,$q:x^2-ax-1<0$,若 p 是 q 的充分不必要条件,则 (　　)

A. $a\geqslant\frac{3}{2}$　　B. $0<a\leqslant\frac{3}{2}$

C. $a>2$　　D. $0<a\leqslant2$

◆◆ 总结反思

充分条件、必要条件的应用一般表现在参数的求解问题上,解题时通常把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系,然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解.解题过程中要注意检验区间的端点值.

变式题 [2024·山西阳泉三模]已知 $p:x\geqslant a$,$q:|x+2a|<3$,且 p 是 q 的必要不充分条件,则实数 a 的取值范围是________.

第3讲　等式与不等式

【课标要求】 梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

(1)作差法$\begin{cases} a-b>0\Leftrightarrow a______ b, \\ a-b=0\Leftrightarrow a______ b, \\ a-b<0\Leftrightarrow a______ b. \end{cases}$

(2)作商法

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b}>1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0), \\ \dfrac{a}{b}=1\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a,b\neq 0), \\ \dfrac{a}{b}<1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0). \end{cases}$$

2. 等式的性质

(1)若 $a=b$,$b=c$,则 $a=c$.

(2)如果 $a=b$,则对任意 c,都有________或________.

(3)如果 $a=b$,则对任意不为零的 c,都有________或________.

3. 不等式的性质

性质	内容
可加性	如果 $a>b$,那么 $a+c$______$b+c$
可乘性	如果 $a>b$,$c>0$,那么 ac______bc
	如果 $a>b$,$c<0$,那么 ac______bc
传递性	如果 $a>b$,$b>c$,那么________
对称性	$a>b\Leftrightarrow b<a$

4. 不等式性质的推论

推论	内容
移项法则	如果 $a+b>c$,那么 $a>c-b$
同向不等式相加	如果 $a>b$,$c>d$,那么________
同向不等式相乘	如果 $a>b>0$,$c>d>0$,那么________
可乘方性	如果 $a>b>0$,那么________$(n\in\mathbf{N},n>1)$
可开方性	如果 $a>b>0$,那么$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

◆◆ 常用结论

1. 若 $a<x<b$,$c<y<d$,则 $a-d<x-y<b-c$.

2. 若 $\frac{a}{b}<1$,$a,b,m>0$,则 $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1$;

若 $\frac{a}{b}>1$,$a,b,m>0$,则 $\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}>1$.

对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] 设 $M=x^2+y^2+1$,$N=2(x+y-1)$,则 M 与 N 的大小关系为________.

2. [教材改编] 若 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是________.

3. [教材改编] 已知 a,b,c 都是实数,若 $a>b$,则下列说法正确的是________.(填序号)

①$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$;②$ac>bc$;③$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$;④$a-c>b-c$.

题组二　常错题

4. [忽视字母的取值范围] 对于任意实数 a,b,c,d,给出下列四个说法:

①若 $a>b$,$c\neq 0$,则 $ac>bc$;

②若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$;

③若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$;

④若 $a>b$,$c>d>0$,则 $ac>bd$.

其中,正确说法的序号是________.

5. [多次运用不等式性质致错] 已知实数 $a\in(-3,1)$,$b\in\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$,则$\frac{a}{b}$的取值范围是________.

6. [变形不彻底或方向不明确] 设 $p=1+2x^4$,$q=2x^3+x^2$,则 p,q 的大小关系是________.

探究点一　比较数(式)的大小

例 1 (1)设 $x,y\in\mathbf{R}$,比较 $(x^2-y^2)^2$ 与 $xy(x-y)^2$ 的大小.

(2)已知 a,b 都是正数,试比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

◆◆ **总结反思**

(1)判断两个式子大小关系的常用方法:作差法、作商法、不等式性质法、函数单调性法、中间量法、特殊值法等.

(2)作差(商)法的一般步骤是:作差(商),变形,定号,得出结论.

变式题 (1)[2025·黑龙江十校联考] 已知 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$,$b=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$,$c=a^2$,则 (　　)

A. $c>a>b$　　B. $b>c>a$

C. $c>b>a$　　D. $b>a>c$

(2)若 $a=\dfrac{\ln 3}{3}$,$b=\dfrac{\ln 4}{4}$,$c=\dfrac{\ln 5}{5}$,则 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

探究点二　不等式的性质

例 2 (1)[2024·北京丰台区二模] 若 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a>b$,则 (　　)

A. $\dfrac{1}{a^2+1}<\dfrac{1}{b^2+1}$　　B. $a^2b>ab^2$

C. $a^2>ab>b^2$　　D. $a>\dfrac{a+b}{2}>b$

(2)(多选题)若 $\dfrac{c^3}{a}<\dfrac{c^3}{b}<0$,则 (　　)

A. $|a|<|b|$　　B. $ac<bc$

C. $\dfrac{a-b}{c}>0$　　D. $0<\dfrac{a}{b}<1$

◆◆ **总结反思**

解决不等式有关问题常用的三种方法:

(1)直接利用不等式的性质逐个验证,利用不等式的性质判断不等式是否成立时要特别注意前提条件;

(2)利用特殊值法排除错误答案;

(3)构造函数,利用函数的单调性判断.

变式题 (1)已知 $a>b$,则下列不等式中一定成立的是 (　　)

A. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B. $a^2>b^2$

C. $\ln a>\ln b$　　D. $2^{a-b}>1$

(2)(多选题)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$,下列选项中是"$a>b$"的充分条件的是 (　　)

A. $a+c>b+c$　　B. $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}>0$

C. $\dfrac{a}{c^2}>\dfrac{b}{c^2}$　　D. $a^2>b^2$

探究点三　不等式性质的综合应用

例 3 已知 $-3<a<-2$,$2<b<4$,则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是________.

◆◆ **总结反思**

求代数式的取值范围需注意两点:(1)严格运用不等式的性质;(2)利用整体思想,通过"一次性"不等关系的运算求解范围,防止在多次运用不等式的性质时扩大变量的取值范围.

变式题 已知实数 a,b,c 满足 $a>b>c$,且 $a+b+c=0$,那么 $\dfrac{c}{a}$ 的取值范围是________.

第 4 讲　均值不等式

【课标要求】 1. 掌握均值不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,b>0)$.

2. 结合具体实例,能用均值不等式解决简单的最大值或最小值问题.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 均值不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(1)均值不等式成立的条件:________.

(2)等号成立的条件:当且仅当________时取等号.

(3)数________称为 a,b 的算术平均数;数 $\sqrt{ab}$ 称为 a,b 的几何平均数.

2. 几个重要的不等式

(1)$a^2+b^2\geqslant$______$(a,b\in\mathbf{R})$.

(2)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant$______$(a,b$ 同号$)$.

(3)$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R})$.

(4)$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbf{R})$.

3. 利用均值不等式求最值问题

已知 $x>0,y>0$.

(1)如果积 xy 是定值 p,那么当且仅当 $x=y$ 时,$x+y$ 有最小值,是______.(简记:积定和最小)

(2)如果和 $x+y$ 是定值 p,那么当且仅当 $x=y$ 时,xy 有最大值,是______.(简记:和定积最大)

◆◆ 常用结论

1. 若 $a>0,b>0$,则 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

2. 当 $x>0$ 时,函数 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 在 $x=\sqrt{a}$ 处取得最小值 $2\sqrt{a}$;当 $x<0$ 时,函数 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 在 $x=-\sqrt{a}$ 处取得最大值 $-2\sqrt{a}$.

对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] 当 $x=$________时,$x^2+\frac{1}{x^2}$ 取得最小值________.

2. [教材改编] 函数 $y=x(3-2x)(0\leqslant x\leqslant1)$ 的最大值是________.

3. [教材改编] 若函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-2}(x>2)$ 在 $x=a$ 处取得最小值,则 $a=$________.

4. [教材改编] 用篱笆围一个面积为 100 m^2 的矩形菜园,则当所用篱笆最短时,所用篱笆的长度是______m;若矩形菜园一边靠墙,墙的长度为 9 m,则当矩形菜园和墙平行的边长为______m 时,所用篱笆最短.

题组二　常错题

5. [没有考虑"一正"] 设 $x<0$,则 $y=3-3x-\frac{1}{x}$ 的最小值是________.

6. [没有考虑等号能否取到] 当 $x\geqslant2$ 时,$x+\frac{4}{x+2}$ 的最小值为________.

课堂考点探究

探究点一　均值不等式的直接应用及常见变形

例 1 (1)(多选题)下列不等式恒成立的是　(　　)

A. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2$　　B. $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

C. $a+b\geqslant2\sqrt{|ab|}$　　D. $a^2+b^2\geqslant-2ab$

(2)(多选题)设正实数 m,n 满足 $m+n=1$,则下列不等式恒成立的是　(　　)

A. $\frac{1}{mn}\geqslant4$　　B. $\sqrt{m}+\sqrt{n}\leqslant\sqrt{2}$

C. $\sqrt{mn}\leqslant\frac{1}{4}$　　D. $m^2+n^2\geqslant\frac{1}{2}$

◆◆ 总结反思

利用均值不等式比较大小,主要有两个思路:一是直接建立不等关系比较大小;二是观察待比较式子的结构特征,合理选取均值不等式或其变形形式,结合不等式的性质比较大小.

变式题 (1)在下列函数中,最小值是 $2\sqrt{2}$ 的是 ( )

A. $y=x+\frac{2}{x}(x\neq0)$

B. $y=x+\frac{1}{x}(x>0)$

C. $y=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

D. $y=e^x+\frac{2}{e^x}$

(2)[2024·广东汕头二模] 若实数 a,b 满足 $0<a<b$,且 $a+b=1$,则下列四个数中最大的是 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. a^2+b^2

C. $2ab$　　D. a

探究点二　变形用均值不等式求最值

微课1·方法

微点 1　配凑法

例 2 (1)设实数 x 满足 $x>0$,则函数 $y=2+3x+\frac{4}{x+1}$的最小值为 ( )

A. $4\sqrt{3}-1$　　B. $4\sqrt{3}+2$

C. $4\sqrt{2}+1$　　D. 6

(2)[2024·江苏盐城模拟] $x\sqrt{3-2x^2}(-1<x<0)$的最小值为 ( )

A. $-\frac{1}{2}$　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$　D. $-\frac{3}{4}$

◆◆ 总结反思

均值不等式具有将"和式"转化为"积式"和将"积式"转化为"和式"的放缩功能,利用均值不等式求最值时,要根据式子的特征灵活变形,先配凑出积、和为常数的形式,再利用均值不等式求解.

微点 2　常数代换法

例 3 (1)[2024·浙江杭州模拟] 若 $0<x<\frac{1}{2}$,则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-2x}$的最小值是 ( )

A. $3+2\sqrt{2}$　　B. 6

C. $4\sqrt{2}$　　D. 9

(2)已知 $x>0,y>0$,且 $4x+2y-xy=0$,则 $2x+y$ 的最小值为 ( )

A. 16　　B. $8+4\sqrt{2}$

C. 12　　D. $6+4\sqrt{2}$

◆◆ 总结反思

常数代换法主要解决形如"已知 $x+y=t$(t 为常数),求 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的最值"的问题,通常先将 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 转化为 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\cdot\frac{x+y}{t}$,再用均值不等式求最值.

微点 3　消元法求最值

例 4 [2024·浙江嘉兴二模] 若正数 x,y 满足 $x^2-2xy+2=0$,则 $x+y$ 的最小值是 ( )

A. $\sqrt{6}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

◆◆ 总结反思

消元法,即根据条件建立两个量之间的函数关系,然后代入代数式转化为函数的最值求解. 有时会出现多元的问题,解决方法是消元后利用均值不等式求解.

应用演练

1. 已知 $0<x<2$,则 $y=x\sqrt{4-x^2}$ 的最大值为 ( )

A. 2　　B. 4

C. 5　　D. 6

2. [2024·南通二调] 设 $x>0,y>0,\frac{1}{x}+2y=2$,则 $x+\frac{1}{y}$的最小值为 ( )

A. $\frac{3}{2}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$　　D. 3

3. (多选题)[2025·广东九校联考] 已知 a,b 均为正实数,且 $a>1,b>1,ab-a-b=0$,则 ( )

A. ab 的最大值为 4

B. $2a+b$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}$的最小值为 2

D. $a+b$ 的最小值为 $3-2\sqrt{2}$

4. [2024·天津河东区一模] 若 $a>0,b>0,ab=2$,则$\frac{a+4b+2b^3}{b^2+1}$的最小值为________.

探究点三　均值不等式的实际应用

例 5　某厂家拟在 2026 年举行促销活动，经调查测算，该产品的年销量(即该厂的年产量)x(单位：万件)与年促销费用 $t(t\geqslant 0$，单位：万元)之间满足 $x=4-\frac{k}{2t+1}$(k 为常数)．若不搞促销活动，则该产品的年销量只有 1 万件．已知 2026 年生产该产品的固定投入为 6 万元，每生产 1 万件该产品需要再投入 12 万元，该厂家将每件产品的销售价格定为每件产品平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分)．

(1)设该厂家 2026 年该产品的年利润为 y 万元，求 y 关于 t 的函数关系式．

(2)该厂家 2026 年该产品的年促销费用为多少万元时该产品的年利润最大？

◆◆ 总结反思

有关函数最值的实际问题的解题技巧

(1)根据实际问题建立函数的解析式，再利用均值不等式求得函数的最值．

(2)设变量时一般要把求最大值或最小值的变量定义为函数．

(3)解应用题时，一定要注意变量的实际意义及其取值范围．

(4)在应用均值不等式求函数最值时，若等号取不到，则可利用函数的单调性求解．

变式题　(1)[2024·上海奉贤区二模] 某商品的成本 C 与产量 q 之间满足关系式 $C=C(q)$，定义平均成本 $\overline{C}=\frac{C(q)}{q}$，假设 $C(q)=\frac{1}{4}q^2+100$，则当 $q=$________时，平均成本最少．

(2)已知快递公司要从 A 地往 B 地送货，A，B 两地间的距离为 100 km，按交通法规，A，B 两地之间的公路车速 x(km/h)应限制在[60，120]内，假设汽车每小时的油耗为$\left(42+\frac{7x^2}{400}\right)$元，司机每小时的工资为 70 元，且汽车匀速行驶．若燃油费用与司机工资都由快递公司承担，则行车总费用 y(元)关于车速 x(km/h)的函数关系式为 $y=$______________；若不考虑其他费用，则以________km/h 的车速行驶，快递公司需要支付的总费用最少，最少费用为________元．

拓展应用 1　三元均值不等式、柯西不等式

1．三元均值不等式：

如果 a,b,c 均为正数，那么 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$(当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立)．

推广：n 元均值不等式：如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数，那么 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立)．

[课本探源：人 B 必修第一册 P76 探索与研究]

2．柯西不等式：

(1)二维形式的柯西不等式

若 a,b,c,d 都是实数，则 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$，当且仅当 $ad=bc$ 时，等号成立．

(2)三维形式的柯西不等式

设 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 都是实数，则 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$，当且仅当 $b_i=0(i=1,2,3)$ 或存在一个数 k，使得 $a_i=kb_i(i=1,2,3)$ 时，等号成立．

[课本探源：人 A 必修第二册 P37 第 16 题]

【典型例题】

例1 已知 $x>0$，则 $y=6x+\dfrac{3}{x^2}$ 的最小值是________.

例2 (1)函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{9}{1-2x}\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$ 的最小值是________.

(2)函数 $y=2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+1}$ 的最大值为________.

【巩固演练】

1. 若 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=1$，则 $(1-a)(1-b)(1-c)$ 的最大值为 ( )

A. $\dfrac{8}{9}$　B. $\dfrac{8}{21}$　C. $\dfrac{8}{27}$　D. $\dfrac{8}{33}$

2. 对任意的正实数 x,y，$\sqrt{x}+\sqrt{5y}\leqslant k\sqrt{x+y}$ 恒成立，则 k 的最小值为 ( )

A. $\sqrt{5}$　B. $\sqrt{6}$　C. $2\sqrt{2}$　D. $\sqrt{10}$

3. 已知 $3x^2+2y^2=6$，则 $2x+y$ 的最大值为________.

4. 为提高学生的数学核心素养和学习数学的兴趣，学校在高一年级开设了《数学探究与发现》选修课. 在某次主题是“向量与不等式”的课上，学生甲运用平面向量的数量积知识证明了著名的柯西不等式(二维)，当向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ 时，有 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$，即 $(x_1x_2+y_1y_2)^2\leqslant(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$，当且仅当 $x_1y_2=x_2y_1$ 时等号成立. 学生乙从这个结论出发，得到了一个新不等式：$(x_1x_2-y_1y_2)^2\geqslant(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)$，当且仅当 $x_1y_2=x_2y_1$ 时等号成立，并取名为“类柯西不等式”. 根据前面的结论可知，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$\dfrac{1}{2x^2+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$ 的最小值是________.

第5讲　一元二次方程、不等式

【课标要求】 1. 会结合一元二次函数的图象，判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数，了解函数的零点与方程根的关系.

2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程，了解一元二次不等式的现实意义. 能借助一元二次函数求解一元二次不等式，并能用集合表示一元二次不等式的解集.

3. 借助一元二次函数的图象，了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

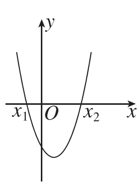
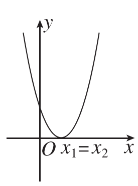
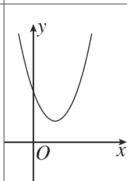
课前基础巩固

知识聚焦

1. 一元二次不等式

一般地，形如 $ax^2+bx+c>0$ 的不等式称为一元二次不等式，其中 a,b,c 是常数，而且 $a\neq0$.

2. 三个“二次”间的关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两个不相等的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根

(续表)

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	________	________	________
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	________	________	________

3. 分式不等式

(1)$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$；

$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$.

(2)$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant0,\\g(x)\neq0;\end{cases}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant0,\\g(x)\neq0.\end{cases}$

◆◆ 常用结论

1. 绝对值不等式 $|x|>a(a>0)$ 的解集为 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$,绝对值不等式 $|x|<a(a>0)$ 的解集为 $(-a,a)$.

2. (1)对于不等式 $ax^2+bx+c>0$,求解时不要忘记讨论 $a=0$ 时的情形;

(2)注意区分 $\Delta<0$ 时,$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 还是 $\varnothing$.

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 不等式 $x^2-5x-6\geqslant0$ 的解集为________.

2. [教材改编] 不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$,则 $a+b$ 的值是________.

3. [教材改编] 不等式 $mx^2+mx+1>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则实数 m 的取值范围是________.

题组二 常错题

4. [忽视口诀"大于取两边,小于取中间"的使用条件] 不等式 $(5-x)(2x-7)>0$ 的解集是________.

5. [忽视分式不等式中分母不能为零] 不等式 $\frac{2}{x+1}\leqslant1$ 的解集是________.

6. [忽视两根大小] 对于给定的实数 a,关于 x 的一元二次不等式 $(x-a)(x-2)<0$ 的解集可能为________.

①$(-\infty,2)\cup(a,+\infty)$;

②$(-\infty,a)\cup(2,+\infty)$;

③$(a,2)$;

④$\varnothing$.

7. [忽视一元二次不等式中二次项系数是否能为零] 若关于 x 的不等式 $ax^2+2x+1<0$ 有实数解,则 a 的取值范围是________.

课堂考点探究

探究点一 一元二次不等式的求解

角度1 不含参的不等式

例1 (1)不等式 $\frac{2x+1}{3-x}\geqslant1$ 的解集为________.

(2)不等式 $0<x^2-x-2\leqslant4$ 的解集为________.

◆◆ 总结反思

解一元二次不等式的一般步骤是:①化为标准形式($a>0$);②确定判别式 Δ 的符号,若 $\Delta\geqslant0$,则求出该不等式对应的一元二次方程的根,若 $\Delta<0$,则对应的一元二次方程无根;③结合二次函数的图象得出不等式的解集.特别地,若一元二次不等式的左边能因式分解,则可直接写出不等式的解集.

角度2 含参的不等式

例2 解关于 x 的不等式:$ax^2-(a+2)x+2<0$ $(a\in\mathbf{R})$.

◆◆ 总结反思

对含参的不等式,应对参数进行分类讨论,常见的分类有:

(1)根据二次项系数为正、负及零进行分类;

(2)根据判别式 Δ 与 0 的关系判断对应一元二次方程根的个数;

(3)对应的一元二次方程有两个根时,有时还需根据两根的大小进行讨论.

角度 3　二次复合含参不等式

例 3　已知函数 $f(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1$，求关于 x 的不等式 $f(x)<0$ 的解集.

总结反思

对于复合指数(对数)不等式，可通过换元法，转化为一元二次不等式后求解. 需要注意的是换元前后对未知数取值范围的影响.

变式题　解关于 x 的不等式 $x^2-ax+1<0$.

探究点二　一元二次不等式恒成立问题

角度 1　在 R 上的恒成立问题

例 4　若关于 x 的不等式 $kx^2+(k-6)x+2>0$ 的解集为 **R**，则实数 k 的取值范围是 (　　)

A. $[2,18]$　　B. $(-18,-2)$

C. $(2,18)$　　D. $(0,2)$

总结反思

(1)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 恒成立，则满足 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=b^2-4ac<0.\end{cases}$

(2)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$ 恒成立，则满足 $\begin{cases}a<0,\\ \Delta=b^2-4ac<0.\end{cases}$

(3)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立，则首先考虑 $a=0$ 时是否满足.

变式题　若不等式 $mx^2+mx-4<2x^2+2x-1$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $(-2,2)$

B. $(-10,2]$

C. $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2]$

角度 2　在给定区间上的恒成立问题

例 5　若关于 x 的不等式 $x^2-2ax-3<0$ 对任意 $x\in[0,2]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{4},0\right)$

C. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

总结反思

(1)一元二次不等式在给定区间上的恒成立问题，其本质是将不等式恒成立问题转化为最大(小)值问题，即 $f(x)\geqslant 0$ $(x\in[a,b])$ 恒成立等价于 $f(x)_{\min}\geqslant 0(x\in[a,b])$，$f(x)\leqslant 0$ $(x\in[a,b])$ 恒成立等价于 $f(x)_{\max}\leqslant 0(x\in[a,b])$.

(2)若所给的不等式能通过恒等变形使参数与变量分离于不等式的两端，则可避免分类讨论，直接求出参数的范围.

变式题　若不等式 $x^2+mx-1<0$ 对于任意 $x\in[m,m+1]$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

角度 3　给定参数范围的恒成立问题

例 6　若对任意 $m\in[-1,1]$，函数 $f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m$ 的值恒大于零，则 x 的取值范围是 (　　)

A. $(1,3)$　　B. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

C. $(1,2)$　　D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

总结反思

利用变换主元法解决一元二次不等式在给出参数取值范围情况下的恒成立问题时，一定要搞清谁是变换后的主元，谁是变换后的参数，一般地，知道谁的范围，谁就是变换后的主元，求谁的范围，谁就是变换后的参数.

变式题　若不等式 $x^2-ax\geqslant 16-3x-4a$ 对任意 $a\in[-2,4]$ 恒成立，则 x 的取值范围为 (　　)

A. $(-\infty,-8]\cup[3,+\infty)$

B. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

C. $[-8,6]$

D. $(0,3]$